Formelsammlung Klasse 10 & 11 & 12

17. Dezember 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Regeln für Potenzen und Wurzeln

1.1 Potenzen

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^0 = 1$$

1.2 Wurzeln

Nur Wurzeln mit gleichem Exponenten und gleichem Radikanten können zusammengefasst werden, z.B.

$$3\sqrt[n]{a} + 2\sqrt[n]{a} - 3\sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$$

$$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$$

$$\sqrt[\ln]{a^{bx}} = \sqrt[n]{a^x}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[nx]{a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{a}}$$

2 Binomische Formeln

1. Binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Herleitung:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Herleitung:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

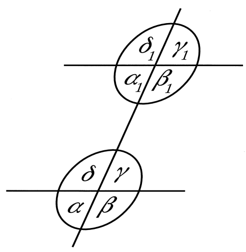
3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Herleitung:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

3 Winkel an geschnittenen Parallelen



Stufenwinkel sind einander gleich.

$$\alpha = \alpha_1 \qquad \beta = \beta_1$$

$$\gamma = \gamma_1 \qquad \delta = \delta_1$$

Wechselwinkel sind einander gleich.

$$\alpha = \gamma_1 \qquad \beta = \delta_1$$

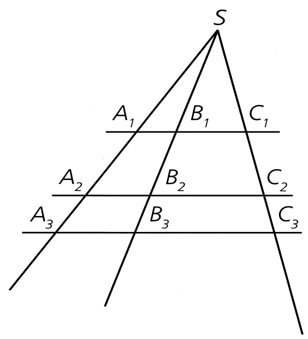
$$\gamma = \alpha_1 \qquad \delta = \beta_1$$

Entgegengesetzte Winkel betragen zusammen 180°.

$$\alpha + \delta_1 = 180° \qquad \beta + \gamma_1 = 180°$$

$$\gamma + \beta_1 = 180° \qquad \delta + \alpha_1 = 180°$$

4 Strahlensätze



4.1 1. Strahlensatz

Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl wie die gleichliegenden Abschnitte auf jedem anderen Strahl.

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} : \overline{SA_3} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2} : \overline{SB_3} = \overline{SC_1} : \overline{SC_2} : \overline{SC_3}$$

oder

$$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = \overline{SC_1} : \overline{C_1C_2} : \overline{C_2C_3}$$

usw.

4.2 2. Strahlensatz

Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die entsprechenden Scheitelstrecken auf irgendeinem Strahl.

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} : \overline{A_3B_3} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2} : \overline{SA_3}$$

oder

$$\overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} : \overline{B_3C_3} = \overline{SC_1} : \overline{SC_2} : \overline{SC_3}$$

usw.
Hieraus folgt:

$$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = \overline{A_3B_3} : \overline{B_3C_3}$$

5 Kreis

Umfang eines Kreises mit dem Radius r:

$$U = 2\pi r$$

Fläche eines Kreises mit dem Radius r:

$$A = \pi r^2$$

Kreisbogen mit der Länge b, dem Radius r und dem Mittelpunktwinkel φ:

$$b = \frac{\pi r}{180°}\,\varphi \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{180°}{\pi r}\,b$$

Flächeninhalt eines Kreisausschnittes (Kreissektors) mit dem Mittelpunktswinkel φ, dem Radius r und der Bogenlänge b:

$$A = \frac{\pi r^2}{360°}\,\varphi = \frac{br}{2} \qquad \text{und} \qquad A = \frac{r^2}{2}\,arc\,\alpha$$

Flächeninhalt eines Kreisabschnittes (Kreissegmentes) mit dem Mittelpunktswinkel φ, dem Radius r, der Bogenlänge b und der Höhe h:

$$s = 2\sqrt{2hr - h^2}$$

$$h = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2} \qquad \text{für} \quad h < r$$

$$A = \text{Kreissektor} - \text{Dreieck}AMB$$

$$A = \frac{1}{2}[br - s(r-h)]$$

$$A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180°} - \sin\alpha\right)$$

6 Dreieck

6.1 Rechtwinkliges Dreieck

Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (\text{mit}\,\gamma = 90°)$$

Kathetensatz des Euklid:

$$a^2 = cp \qquad b^2 = cq$$

Höhensatz des Euklid:

$$h^2 = pq$$

Winkelfunktionen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Komplementbeziehungen:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$$

Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

6.2 Schiefwinkliges (Allgemeines) Dreieck

Flächeninhalt:

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$$

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - (2bc\,\cos\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - (2ac\,\cos\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - (2ab\,\cos\gamma)$$

7 Körper

7.1 Prisma

Beliebiges Prisma (gerade oder schief):

$$V = A_G h$$

$$A_O = A_M + 2A_G$$

Satz des Cavalieri: Lassen sich zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 anordnen und schneidet jede dazwischenliegende Parallelebene ϵ beide Körper in jeweils gleichgroße Flächen, so haben die Körper gleichen Rauminhalt.

7.2 Pyramide

Beliebige Pyramide (gerade und schief):

$$V = \frac{1}{3} A_G h$$

$$A_O = A_M + A_G$$

Satz des Cavalieri: Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleich langen Höhen haben den gleichen Rauminhalt.

7.3 Zylinder

Gerader Zylinder:

$$V = A_G h$$

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2}{4} h$$

$$A_M = 2\pi r h = \pi d h$$

$$A_O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h) = \pi d \left(\frac{d}{2} + h \right)$$

Schiefer Zylinder:

$$V = A_G h = \pi r^2 h$$

7.4 Kegel

Gerader Kegel:
s = Mantellinie

$$V = \frac{1}{3} A_G h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{12} d^2 h$$

$$A_M = \pi r s = \frac{\pi}{2} d s$$

$$A_O = \pi r(r+s) = \pi \frac{d}{2}\left(\frac{d}{2} + s\right)$$

Schiefer Kegel:

$$V = \frac{1}{3} A_G h$$

7.5 Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{A_O^3}{\pi}}$$

$$A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2 = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_O}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$d = \sqrt{\frac{A_O}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

8 Exponentialfunktionen

Wird bei einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = c\,a^x$ zu einem beliebigen x-Wert die Zahl h hinzuaddiert, dann ergibt sich der Funktionswert $f(x+h)$ für alle $x \in \Re$ aus dem Funktionswert $f(x)$ durch Multiplikation mit demselben Faktor q; d.h. zu jeder Zahl h gibt es eine Zahl q, so dass für alle $x \in \Re$ gilt:

$$f(x+h) = q\,f(x).$$

Gibt es zu n Paaren reeller Zahlen $(x_1|y_1), (x_2|y_2), \ldots, (x_n|y_n)$ mit äquidistanten Werten x_k eine Zahl $q \in \Re^{>0}$, so dass für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ gilt:

$$y_{k+1} = q\,y_k,$$

so existiert eine Exponentialfunktion f mit:

$$f(x_k) = y_k \quad (\text{für } k = 1, 2, \ldots, n).$$

9 Logarithmieren

Das Logarithmieren ist die zweite Umkehrung des Potenzierens: Der Logarithmus einer positiven Zahl y zu einer Basis a, also $\log_a y$, ist diejenige Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um y zu erhalten.

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$$

$$x = a^{\log_a x} \qquad \text{für } x > 0$$

$$x = \log_a a^x$$

Zusammenhang der Logarithmensysteme:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_c a \frac{1}{log_c b} = \log_c a \log_b c$$

Der Umrechnungsfaktor $\frac{1}{\log_c b} = \log_b c$ heisst *Modul*.

Zusammenhang zwischen dekadischen und natürlichen Logarithmen:

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \ln a \lg e$$

$$\frac{1}{\ln 10} = \lg e = M_{10} = 0,43429\ldots \qquad \textit{Modul der dekadischen Logarithmen}$$

$$\ln a = \lg a \ln 10$$

$$\ln 10 = \frac{1}{M_{10}} = 2,30259\ldots \qquad \textit{Modul der natürlichen Logarithmen}$$

Sonderfälle:

$$\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0 \qquad \log_b 0 = \begin{cases} -\infty & \text{für } b > 1 \\ +\infty & \text{für } b < 1 \end{cases}$$

$$\lg 0 = -\infty \qquad \ln 0 = -\infty \qquad \log_b \infty = \begin{cases} +\infty & \text{für } b > 1 \\ -\infty & \text{für } b < 1 \end{cases}$$

9.1 Logarithmengesetze

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$$

$$\lg(ac) = \lg a + \lg c \qquad \ln(ac) = \ln a + \ln c$$

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$$

$$\lg \frac{a}{c} = \lg a - \lg c \qquad \ln \frac{a}{c} = \ln a - \ln c$$

$$\log_b(a^n) = n \log_b a$$

$$\lg(a^n) = n \lg a \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_b a$$

$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a \qquad \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$$

10 Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Normalform:

$$x^2 + px + q = 0$$

mit:

$$p = \frac{B}{A} \qquad \text{und} \qquad q = \frac{C}{A}$$

Lösung für die Normalform:

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diskriminante

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$D > 0$ ergibt zwei verschiedene reelle Lösungen
$D = 0$ ergibt zwei gleiche reele Lösungen ($x_1 = x_2$)
$D < 0$ ergibt zwei konjugiert komplexe Lösungen

11 Funktionen

Eine Zuordnung, die jeder Zahl x aus einer Menge D genau **eine** reelle Zahl y zuordnet, heißt *Funktionswert* von x (an der Stelle x zu dem Argument x).
Die Menge D nennt man *Definitionsbereich* der Funktion. Die Menge W aller Funktionswerte heißt *Wertebereich* (Wertmenge) der Funktion.

11.1 Lineare Funktionen

Normalform:

$$y = mx + b$$

m gibt die *Steigung* der Geraden, b den Achsenabschnitt auf der 2. Koordinatenachse (y) an.

Zwei-Punkte-Form:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Punkt-Steigungs-Form:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Achsenabschnittsform:
Schneidet eine Gerade die 1. Achse (x) im Punkt a und die 2. Achse (y) im Punkt b (mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ so gilt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Die *Steigung* m einer Geraden beträgt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{für } x_2 \neq x_1$$

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann **parallel** wenn gilt:

$$m_1 = m_2$$

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 stehen genau dann **senkrecht** (orthogonal) aufeinander wenn gilt:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \text{bzw.} \quad m_1 m_2 = -1$$

Der *Mittelpunkt* M der Strecke zwischen den Punkten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ hat die Koordinaten:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{und} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Die *Länge* d der Strecke zwischen den Punkten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ beträgt:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Der *Schnittpunkt* der beiden Geraden

$$y = m_1 x + b_1 \qquad \text{und} \qquad y = m_2 x + b_2$$

hat die Koordinaten:

$$x_S = \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1}$$

11.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Der Punkt mit dem größten bzw. kleinsten Funktionswert der Funktion f heißt *Scheitelpunkt.*
Die allgemeine Form lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{mit} \quad a \neq 0$$

Die Kurvenform ist eine quadratische Parabel, die Achse ist parallel zur y-Achse:

$$a > 0 \quad \text{nach oben geöffnet}$$

$$a < 0 \quad \text{nach unten geöffnet}$$

Normalform:

$$y = x^2 + px + q \qquad\qquad S = \left(-\frac{p}{2} \; ; - \left[\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \right] \right)$$

Sonderfälle:

$$y = ax^2 \quad \text{Parabel mit Scheitel im Ursprung}$$

$$a = 1 \quad \text{Normalparabel}$$

$$|a| < 1 \quad \text{flachere Parabel}$$

$$|a| > 1 \quad \text{steilere Parabel}$$

Aus der Scheitelpunktform:

$$y = a(x - d)^2 + e \quad \text{kann man den Scheitelpunkt ablesen: } S(d|e)$$

11.2.1 Tangente an Parabel

Die Tangente im Parabelpunkt $P_1(x_1|y_1)$ an die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$
hat die Steigung:

$$m = 2ax_1$$

und die Gleichung:

$$y = 2ax_1x - y_1$$

11.2.2 Brennpunkt

Bei einer Parabel werden alle parallel zur Symmetrieachse einfallenden Strahlen so reflektiert, dass die reflektierten Strahlen durch einen Punkt, den *Brennpunkt* der Parabel, gehen. Die Parabel mit der Gleichung:

$$y = ax^2 \quad \text{mit } a \neq 0$$

hat den Brennpunkt:

$$B(0|\frac{1}{4a})$$

11.3 Kreise

Alle Punkte eines Kreises haben vom Mittelpunkt M denselben Abstand r (Radius).

Mittelpunktgleichung $M(0|0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Allgemeine Kreisgleichung $M(d|e)$:

$$(x - d)^2 + (y - e)^2 = r^2$$

Scheitelgleichung des Kreises $M(r|0)$:

$$y^2 = 2rx - x^2$$

11.3.1 Tangente an einen Kreis

Die Tangente an den Kreis im Punkt $P(x_1|y_1)$ ist orthogonal zum Berührungsradius.

Für Tangenten an Kreise mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ gilt:

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

mit der Tangentensteigung:

$$m_1 = -\frac{x_1}{y_1} \qquad \text{für } y_1 \neq 0$$

Für Tangenten an Kreise mit der Gleichung $(x - d)^2 + (y - e)^2 = r^2$ gilt:

$$(x - d)(x_1 - d) + (y - e)(y_1 - e) = r^2$$

mit der Tangentensteigung:

$$m_1 = -\frac{x_1 - d}{y_1 - e} \qquad \text{für } y_1 \neq e$$

12 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung dient der Bestimmung der Steigung der Tangente an den Grapen einer Funktion f an einer Stelle x_0.

12.1 Definitionen

Definition 1: Die Steigung des Graphen einer Funktion f in einem Punkt P ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt P.

Definition 2: Unter der *Ableitung* einer Funktion f an der Stelle a versteht man die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle a. Diese Ableitung wird mit $f'(a)$ bezeichnet.

Definition 3: Die Ableitung $f'(a)$ der Funktion f an der Stelle a ihres Definitionsbereiches ist eine *Zahl*, die man folgendermaßen erhält:

1. Man bildet den Differenzquotienten $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2. Man bildet den Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

3. Falls dieser Grenzwert existiert, so setzt man $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Die Funktion f heißt dann an der Stelle a **differenzierbar**. Existiert dieser Grenzwert nicht, so heißt f an der Stelle a **nicht differenzierbar**.

Definition 4: Der Graph der Funktion f hat an einem Punkt $P(a|f(a))$ eine *Tangente*, wenn f an der Stelle a differenzierbar ist.
Die *Tangente* ist dann die Gerade durch P, welche die Steigung $f'(a)$ hat.
Ist f an der Stelle a nicht differenzierbar, so hat der Graph von f im Punkt $P(a|f(a))$ auch keine Tangente, es sei denn, die Tangente verläuft parallel zur 2. Achse.

Definition 5: Unter der *Ableitungsfunktion f' der Ausgangsfunktion* f (meist kurz *Ableitung f' von* f genannt), versteht man diejenige Funktion, die jeder Stelle x, an welcher f differenzierbar ist, die Ableitung von f an dieser Stelle zuordnet.
Das Bestimmen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f heißt *Differenzieren.*
Für die Ableitungsfunktion gilt: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

12.2 Ableitungen einiger Elementarfunktionen

$$
\begin{array}{lll}
y = k & y' = 0 & \\
y = x & y' = 1 & \\
y = mx + b & y' = m & \\
y = \frac{1}{x} & y' = -\frac{1}{x^2} & \\
y = \sqrt{x} & y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \\
y = x^n & y' = nx^{n-1} & n \in \mathcal{K} \setminus \{0\} \\
y = e^x & y' = e^x & \\
y = a^x & y' = a^x \ln a & \\
y = \ln x & y' = \frac{1}{x} & \\
y = \log_a x & y' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e & \\
y = \lg x & y' = \frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0{,}4343}{x} & \\
y = \sin x & y' = \cos x & \\
y = \cos x & y' = -\sin x & \\
y = \tan x & y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x & \\
y = \cot x & y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) &
\end{array}
$$

12.3 Ableitungsregeln

Summenregel: *Eine Summe wird gliedweise differenziert.*

$$y = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \qquad y' = u_1' + u_2' + \cdots + u_n'$$

mit $u_1, u_2, \cdots, u_n$ Funktionen von x
Beispiel:

$$f(x) = x^3 + \sin x \qquad f'(x) = 3x^2 + \cos x$$

Differenzregel: *Eine Differenz wird gliedweise differenziert.*

$$y = u_1 - u_2 - \cdots - u_n \qquad y' = u_1' - u_2' - \cdots - u_n'$$

mit $u_1, u_2, \cdots, u_n$ Funktionen von x
Beispiel:

$$f(x) = x^5 - x^7 \qquad f'(x) = 5x^4 - 7x^6$$

Produktregel:

$$y = uv \qquad y' = u'v + uv'$$

$$y = uvw \qquad y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
y = (x^3 + a)(x^2 + 3b) & |x^3 + a = u \quad u' = 3x^2| \\
y' = 3x^2(x^2 + 3b) + (x^3 + a)2x & |x^2 + 3b = v \quad v' = 2x| \\
y' = 5x^4 + 9bx^2 + 2ax &
\end{array}
$$

und: *ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.*

$$y = ku \qquad y' = ku'$$

Beispiel:

$$y = 10x^6 \qquad y' = 10 * 6x^5 \qquad y' = 60x^5$$
$$y = 5\sin x \qquad y' = 5\cos x$$

Quotientenregel:

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \text{für} v \neq 0$$

Sonderfall:

$$y = \frac{1}{v(x)} \qquad y' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel:

$$y = f(g[h(x)]) \Rightarrow \quad y = f(u) \quad u = g(v) \quad v = h(x)$$
$$y' = f'(u)\, g'(v)\, h'(x)$$

Vereinfachter Fall:

$$y = f[g(x)] \quad \Rightarrow \quad y = f(u) \quad u = g(x)$$
$$y = f(u) \quad \textit{äußere Funktion} \quad u = g(x) \quad \textit{innere Funktion}$$
$$y' = f'(u)\, g'(x)$$

Beispiel:

$$y = f(x) = (2x - 5)^2$$
$$u = \varphi(x) = 2x - 5 \qquad y = \varphi(u) = u^2$$
$$y' = 5u^4\, 2 = 10(2x - 5)^4$$

13 Untersuchung von Funktionen

Ist eine Kurve in einem Punkt $P(x; y)$ steigend, so ist $f'(x) > 0$ (also positiv); ist sie in $P(x; y)$ fallend, so ist $f'(x) < 0$ (also negativ).

Eine Funktion f sei in dem Intervall J differenzierbar.
Die Funktion f ist in J dann *konkav* (nach innen gewölbt), wenn in jedem Punkt des Kurvenbildes von f die Tangente oberhalb der Kurve liegt.
Die Funktion f ist in J dann *konvex* (nach aussen gewölbt), wenn in jedem Punkt des Kurvenbildes von f die Tangente unterhalb der Kurve liegt.

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall J *monoton steigend*, wenn für irgend zwei Werte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt. Sie heißt *monoton fallend*, wenn mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geq f(x_2)$ gilt.
Gilt ausschließlich das Ungleicheitszeichen, ist also im ganzen Intervall J $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, so spricht man von *strenger Monotonie*.

13.1 Extremwerte

Eine Funktion hat einen größten Wert oder ein *Maximum* an der Stelle x_E, wenn der Funktionswert an dieser Stelle größer ist, als die Funktionswerte in der unmittelbaren Umgebung.
Eine Funktion hat einen kleinsten Wert oder ein *Minimum* an der Stelle x_E, wenn der Funktionswert an dieser Stelle kleiner ist, als die Funktionswerte in der unmittelbaren Umgebung.
Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_E ein

$$\text{Maximum, wenn } f'(x_E) = 0 \text{ und } f''x_E < 0$$

$$\text{Minimum, wenn } f'(x_E) = 0 \text{ und } f''x_E > 0$$

Beachte: $f'(x_E) = 0$ bedeutet nur, dass die Tangente der Kurve in $x = x_E$ waagerecht verläuft. Erst mit $f'' \neq 0$ erhält man die Gewissheit, dass ein Extremum vorliegt. Man sagt auch, die erste Bedingung $f'(x_E) = 0$ ist für ein Extremum *notwendig*, aber nicht *hinreichend*. Dagegen ist die zweite Bedingung $f'' \neq 0$ in Verbindung mit $f'(x_E) = 0$ *hinreichend*, aber nicht *notwendig*, da es Funktionen gibt, bei denen auch die weiteren Ableitungen verschwinden (also 0 sind).

13.2 Wendepunkte

Wendepunkte sind Stellen der Kurve, an denen das konvexe Verhalten der Kurve in konkaves übergeht und umgedreht.
Das Bild einer Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_W dann einen Wendepunkt, wenn:

$$f''(x_W) = 0 \quad \text{ist und} \quad f'''(x_W) \neq 0$$

Beachte: $f''(x_W) = 0$ bedeutet nur, dass $y' = f'(x)$ für $x = x_W$ eine waagerechte Tangente hat, während erst $f'''(x_W) \neq 0$ besagt, dass $f'(x_W)$ ein Extremum von f' ist.

13.3 Kurvendiskussion (unvollständig)

Um eine Abschätzung über den Verlauf einer Kurve und damit das Verhalten der Funktion herzuleiten, untersucht man folgende Punkte und Eigenschaften der Funktion $y = f(x)$:

1. Symmetrieeigenschaften
2. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\, \infty$
3. Nullstellen
4. Polstellen

5. Lücken

6. Definitionsbereich und Wertebereich

7. Extremstellen und Wendepunkte

Zu 1. Eine Symmetrie zur 2. Achse (y-Achse) liegt vor, wenn die Funktion gerade ist, also wenn $f(-x) = f(x)$ ist. Beispiel: $y = x^2$.
Eine zentrische Symmetrie zum Ursprung liegt vor, wenn die Funktion ungerade ist, also wenn $f(-x) = -f(x)$ ist. Beispiel: $y = x^3$.
Eine Symmetrie zur Geraden $y = x$ liegt vor, wenn Funktion und Umkehrfunktion gleich sind, also wenn für $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x) = \varphi(x)$ gilt: $f = \varphi$. Beispiel: $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Zu 3. Nullstellen sind die Achsenabschnitte der Schnittpunkte der Funktion mit der 1. Achse (x-Achse). Diese findet man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$. Bei gebrochenen Funktionen $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ sind die Nullstellen der Funktion gleich den Nullstellen des Zählers $u(x)$, sofern nicht der Nenner $v(x)$ für den gleichen x-Wert ebenfalls eine Nullstelle besitzt.

Zu 6. Definitions- und Wertebereich sind in 11 definiert.

Zu 7. Die Lage der Extremstellen und Wendepunkte findet man nach den Regeln aus 13.1 und 13.2.

14 Integralrechnung

14.1 Bestimmtes Integral

Geometrische Deutung des bestimmten Integrals: Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ gibt zahlenmäßig den Inhalt der Fläche an, die von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ begrenzt wird.

15 Was sonst noch wichtig ist

15.1 Begriffe

Addition:	Summand + Summand = Summe
Subtraktion:	Minuend - Subtrahend = Differenz
Multiplikation:	Faktor * Faktor = Produkt
Division:	Divident : Divisor = Quotient

Potenz:

$$a^n \quad \text{mit: a = Basis und b = Exponent}$$

Wurzel:

$\sqrt[n]{a} = b \quad$ mit: a = Basis, n = Wurzelexponent und b = Wurzelwert

Logarithmus:

$\log_a b = n \quad$ mit: a = Basis, b = Numerus und n = Logarithmus